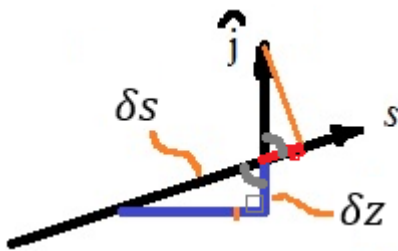


معادله اولر (Euler Eq.)

قبلاً (در بحث تعادل نسبی) نشان داده شد که قانون دوم نیوتن را برای سیال می توان به این صورت نوشت: $\vec{\nabla} p = -\gamma \hat{j} - \rho \vec{a}$
اگر معادله بالا را برای المانی از سیال به طول δs واقع بر روی یک خط جریان (راستای S و جریان یک بعدی) بنویسیم، خواهیم داشت:



$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\gamma \frac{\partial z}{\partial s} - \rho a_s$$

در رابطه اخیر، $\frac{\partial z}{\partial s}$ مطابق شکل روبرو تصویر بردار واحد $\hat{j}$ در راستای خط جریان S را نشان می دهد.

a_s مشتق سرعت نسبت به زمان است و سرعت تابعی است از مسافت پیموده شده بر روی خط جریان (راستای S) و زمان، بنابراین، داریم:

$$v = v(s, t); dv = \frac{\partial v}{\partial s} ds + \frac{\partial v}{\partial t} dt; a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dt}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial s} = -\gamma \frac{\partial z}{\partial s} - \rho \left(v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

با تقسیم بر ρ داریم $(\gamma = \rho g)$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

این معادله را در صورتی که فرض های زیر بدست آید،

- معادله را در امتداد خط جریان نوشته ایم، فرض کرده ایم جریان بی اصطکاک است.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} = 0 \quad \text{اگر جریان دایمی باشد} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

در اینجا می توان به جای مشتق نسبی، مشتق مطلق را نیز در ds قرار داد.

$$\frac{dp}{\rho} + g dz + v dv = 0$$

معادله برنولی

برای حالتی که حجم محصور ثابت است با استفاده از گیری از معادله اولر، معادله برنولی بدست می آید.

$$\frac{p}{\rho} + g z + \frac{v^2}{2} = \text{عدد ثابت}$$

$$\frac{\frac{N}{m^3}}{\frac{kg}{m^3}} = \frac{N_m}{kg} \quad \frac{m}{s^2} \cdot m = \left(\frac{m}{s} \right)^2$$

انرژی به واحد حجم

می توان معادله بدست آمده را بر g تقسیم کرد: (عدد ثابت $= \frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g}$) در رابطه بدست آمده، واحد اندازه گیری هر سه عبارت متر است؛

$$\frac{p}{\gamma} : \frac{N}{m^3} = \frac{N \cdot m^3}{N \cdot m^2} = m; \quad \frac{v^2}{2g} : \frac{\left(\frac{m^2}{s^2} \right)}{\frac{m}{s^2}} = m$$

با توضیحات زیر، متر می تواند معنی انرژی در واحد وزن داشته باشد:

$$Z : \text{انرژی پتانسیل بر واحد وزن} \quad \frac{WZ}{W} = Z \quad \text{انرژی برای بالا بردن سازه} : WZ$$

$$\frac{v^2}{2g} : \text{انرژی جنبشی بر واحد وزن} \quad \frac{\frac{1}{2} m v^2}{mg} = \frac{v^2}{2g}$$

$$\frac{P}{\gamma} : \text{انرژی جریانی بر واحد وزن}$$

وزن المانی از سیال به سطح مقطع δA و طول δs برابر است با $\gamma \delta A \delta s$ و کار انجام شده توسط نیروی فشاری برابر است با $p \delta A \delta s$ که

$$\frac{p \delta A \delta s}{\gamma \delta A \delta s} = \frac{p}{\gamma}$$

این کار به صورت انرژی در سیال ذخیره می شود. از تقسیم انرژی جریانی بر وزن سیال داریم:

معادله برنولی برای دو نقطه روی خط جریان به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

که در آن، Z : ارتفاع هندسی (Geometric (Elevation) Head) $\frac{p}{\gamma}$: ارتفاع فشاری (Pressure Head)

$$\frac{v^2}{2g} : \text{ارتفاع معادل سرعت (Velocity Head) نامیده می شود.}$$

تعدیل فرضیات حاکم بر معادله برنولی:

به منظور ساده شدن حل مسائل، هر یک از فرض های حاکم بر معادله برنولی را می توان در شرایط خاصی لغو کرد:

(۱) در حالتی که تمام خطوط جریان از یک مخزن شروع شده باشند که انرژی در تمام نقاط آن یکسان است، ثابت برنولی برای تمام خطوط جریان یکسان خواهد بود و لذا در معادله برنولی، نقاط ۱ و ۲ را می توانیم به دلخواه انتخاب کنیم. یعنی لزومی ندارد که هر دو روی یک خط جریان واقع باشند.

(۲) برای جریان گازها در مواردی که تغییرات فشار کسر کوچکی (دو، سه درصد) از فشار مطلق باشد، مانند جریان هوا در سیستم های تهویه، می توانیم گاز را تراکم ناپذیر فرض کرده، معادله برنولی را با استفاده از جرم مخصوص متوسط به کار ببریم.

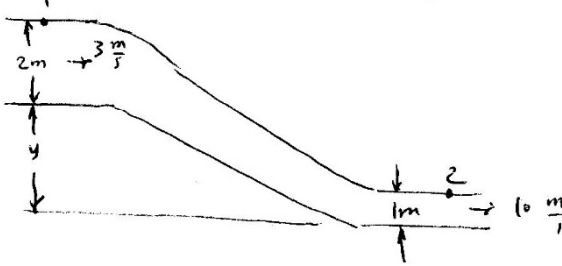
(۳) برای جریان غیردائمی نیز، در مواردی که تغییرات تدریجی باشد، مانند تخلیه یک مخزن بزرگ، می توانیم معادله برنولی را به کار ببریم، بی آنکه خطای زیادی ایجاد شود.

(۴) برای تحلیل جریان سیال واقعی نیز می توانیم از معادله برنولی استفاده کنیم. بدین ترتیب که ابتدا از اصطکاک صرف نظر می کنیم و یک معادله تئوریک به دست می آوریم. آنگاه معادله حاصله را با ضریبی که بطور تجربی تعیین می شود، تصحیح می کنیم. ضریب تجربی، معادله تئوریک را طوری تصحیح می کند که با حالت فیزیکی واقعی تطبیق نماید. در حالت کلی تلفات با استفاده از مغادلاتی که در بخش های ۸ - ۳ و ۹ - ۳ ارائه خواهد شد، به دست می آید.

مثال: در شکل، سرعت جریان آب و ارتفاع جریان در یک کانال روباز برای دو مقطع ۱

و ۲ نوشته شده است. با توجه به این داده‌ها، مطلوب است محاسبه اختلاف ارتفاع y بین

دو مقطع ۱ و ۲. (جریان دائمی و تراکم ناپذیر است.)



$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

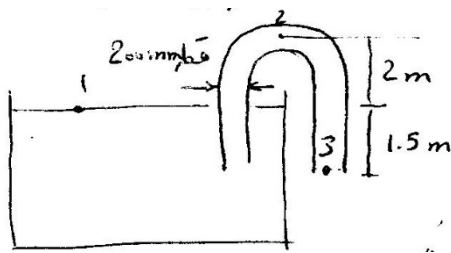
$$\frac{0}{1000(9.81)} + (y + 2) + \frac{3^2}{2(9.81)} = \frac{0}{1000(9.81)} + 1 + \frac{10^2}{2(9.81)} \Rightarrow y = 3.64m$$

معادله انرژی

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_L$$

که در آن، h_L نشان‌دهنده انرژی تلف‌شده (انرژی به ازای واحد وزن بر حسب $\frac{N.m}{N}$) بین دو نقطه ۱ و ۲ می‌باشد؛ سمت چپ معادله یعنی $\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g}$ مجموع انرژی در نقطه ۱ و سه عبارت $\frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$ در سمت راست معادله مجموع انرژی در نقطه ۲ را نشان می‌دهند. بدین ترتیب معنای معادله انرژی از این قرار است:

انرژی تلف‌شده + مجموع انرژی در نقطه ۲ = مجموع انرژی در نقطه ۱



مثال: برای شکل مقابل،

الف) با فرض عدم اتلاف انرژی دبی آب خروجی را حساب کنید

ب) با فرض دبی $150 \frac{lit}{s}$ ، مقدار انرژی تلف‌شده را حساب کنید.

حل الف:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + z_3 + \frac{v_3^2}{2g} \Rightarrow z_1 - z_3 = \frac{v_3^2}{2g}$$

$$V_3 = \sqrt{2g(z_1 - z_3)} = \sqrt{2(9.81)(1.5)} = 5.42 \frac{m}{s}$$

$$Q = VA = 5.42 \cdot \frac{\pi}{4} (0.2)^2 = 0.170 \frac{m^3}{s} = 170 \frac{L}{s}$$

$$Q = 150 \frac{L}{s}$$

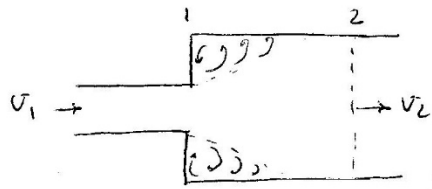
$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.150}{\frac{\pi}{4} (0.2)^2} = 4.77 \frac{m}{s}$$

۱۱

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + z_3 + \frac{v_3^2}{2g} + h_L \Rightarrow h_L = z_1 - z_3 - \frac{v_3^2}{2g}$$

$$h_L = 1.5 - \frac{(4.77)^2}{2(9.806)} = \boxed{h_L = 0.34 m}$$

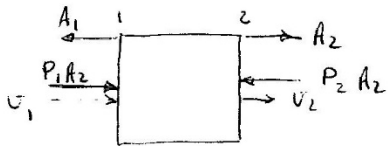
تلفات ناشی از این طناگهانی در لوله



این طناگهانی در مقطع لوله موجب تلفاتی می شود که می توان آن را با کمک معادلات انرژی و مستقیم - منور در شکل جریان را می توانیم ملاحظه

آشفته در این طناگهانی شدن داده شده است - حجم کنترل انتخابی این مقطع ۱ و ۲ می باشد. و می توانیم که توزیع سرعت در این مقطع در درستی و خطای کمترین باشد و از تنش های برشی ناچیز روی دیواره ای حجم کنترل صرف نظر می

$$P_1 A_2 - P_2 A_2 = \rho V_2 (V_2 A_2) + \rho V_1 (V_1 A_1) \quad (1)$$



در مقطع ۱ شتاب شعاعی ذرات سیال در ناحیه گردابی کوچک است و تغییرات فشار هیدر استاتیکی است

$$\text{معادله انرژی} \quad \frac{P_1}{\gamma} + 0 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + 0 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{(P_1 - P_2) A_2}{\rho g} = \frac{1}{\rho g} [V_2^2 A_2 - V_1 V_2 A_2] \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - V_1 V_2}{g}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + h_L$$

$$\Rightarrow \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + h_L = \frac{V_2^2 - V_1 V_2}{g} \Rightarrow h_L = \frac{2V_2^2 - 2V_1 V_2 + V_1^2 - V_2^2}{2g} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

$$h_L = \frac{V_1^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \right]^2$$

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$\text{برای مقطع لوله دایره} : h_L = \frac{V_1^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 \right] = K \frac{V_1^2}{2g}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{\pi}{4} D_1^2}{\frac{\pi}{4} D_2^2} = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2$$

کاربردهای معادله اندازه حرکت

$$\sum F = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho V dV + \int_{CS} \rho V \vec{V} \cdot \vec{dA}$$

معادله اندازه حرکت را می توان برای هر امتداد دلخواه بیان کرد برای مثال در راستای x داریم:

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho V_x dV + \int_{CS} \rho V_x \vec{V} \cdot \vec{dA}$$

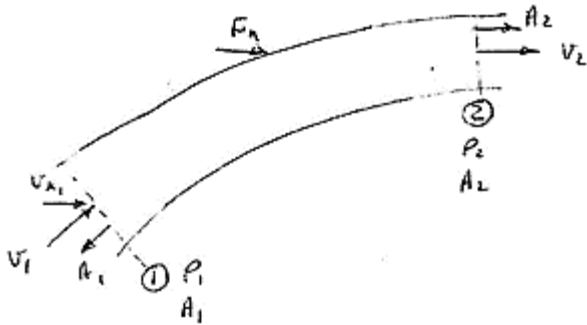
در انتخاب حجم کنترل، بطور کلی بهتر است در مقطعی که جریان وارد یا خارج می شود، سطح کنترل را عمود بر امتداد جریان بگیریم. در این صورت، اگر سرعت در روی سطح ثابت باشد (و یا آن را ثابت فرض کنیم) نیازی به عملیات انتگرال گیری روی سطح نداریم.

برای جریان دائمی، نیروی F_x به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$F_x = \rho_2 V_{x2} (V_2 A_2) + \rho_1 V_{x1} (-V_1 A_1)$$

و از رابطه پیوستگی داریم:

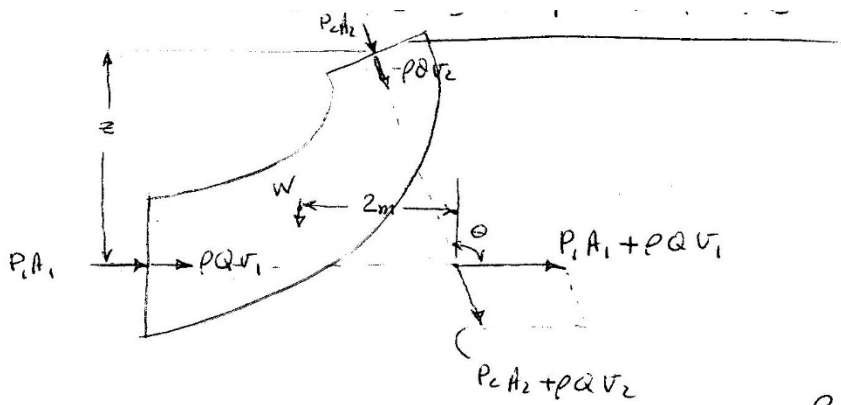
$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 = \rho Q \Rightarrow F_x = \rho Q (V_{x2} - V_{x1})$$



اگر سرعت روی مقطع سطح کنترل ثابت باشد، می توان با وارد کردن ضریب تصحیح β از سرعت سه

$$\int \rho V^2 dA = \beta \rho V^2 A \Rightarrow \beta = \frac{1}{A} \int \left(\frac{V}{V} \right)^2 dA$$

β : ضریب تصحیح اندازه حرکت که مقدار آن همواره بزرگتر یا مساوی ۱ است.



لواء امفی در ناحیه ای با طول ۸ متر

مسئله ۱۵-۳ زاویه کسینوس جریان در مقطع ۲

قرار دارد. آ- راجح جریان است. $D_1 = 2m$

$$W = 80 \text{ kN}, Q = 8.5 \frac{m^3}{s}, P_2 = 1.3m$$

$$P_1 = 280 \text{ kPa}, \theta = 120^\circ, z = 3m$$

$$P_1 = P_2 = 1, h_L = 0.5 \frac{V_2^2}{2g}, \text{ تلف}, \mu = 2m$$

مطلوب است: F_x و F_y (خط اثر را بیابید)

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{8.5}{\frac{\pi}{4} (1.3)^2} = 6.404 \frac{m}{s}$$

$$P_1 = P_2 = \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + 0.5 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{\gamma} = \frac{280 \times 10^3}{9806} + \frac{2.706^2}{2(9.806)} - 3 - 1.5 \frac{6.404^2}{2(9.806)} \Rightarrow \frac{P_2}{\gamma} = 22.791, P_2$$

$$P_2 = 223.5 \text{ kPa.}$$

$$F_x = ? \quad P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos \theta - F_x = \rho Q (V_2 \cos \theta - V_1)$$

$$F_x = 280 \times 10^3 \left(\frac{\pi}{4} \times 2^2 \right) - 223.5 \times 10^3 \left(\frac{\pi}{4} \times 1.3^2 \right) \cos 120^\circ - 1000 (8.5) [6.404 \cos 120^\circ - 2.706]$$

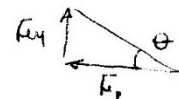
$$F_x = 1078.2 \text{ kN}$$

$$F_y = ?$$

$$\Sigma F_y = \rho Q (V_{y2} - V_{y1}) \Rightarrow F_y - W - P_2 A_2 \sin \theta = \rho Q (V_2 \sin \theta - 0)$$

$$F_y = 80 \times 10^3 + 223.5 \times 10^3 \left(\frac{\pi}{4} \times 1.3^2 \right) \sin 120^\circ + 1000 (8.5) (6.404 \sin 120^\circ)$$

$$F_y = 384 \text{ kN}$$



$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{1078.2^2 + 384^2} = 1145 \text{ kN} = 1.145 \text{ MN}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{384}{1078.2} = 19.6^\circ$$

هنگامی که جت آب مطابق شکل به یک مانع منحنی شکل برخورد کند، از جهت خود منحرف می‌شود و به علت تغییر اندازه حرکت، نیرویی به مانع وارد می‌کند.

فرضیات ساده‌کننده در مطالعه نیروی ناشی از برخورد جت آب به پره‌ها:

از وزن سیال صرف‌نظر می‌شود؛ جت در امتداد مماسی و بدون شوک بر

روی پره جریان دارد؛ از اصطکاک بین جت و پره صرف‌نظر می‌شود. فشار

جت در دو انتهای پره مساوی و برابر صفر است. از اختلاف ارتفاع بین ورودی و خروجی صرف‌نظر می‌شود. (به دلیل سرعت بالای جریان) بنابراین، داریم:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow V_1 = V_2$$

مثال ۱: جت آب با دبی $60 \frac{L}{s}$ و سرعت $50 \frac{m}{s}$ به یک پره ساکن برخورد می‌کند و به

اندازه 135° منحرف می‌شود. نیروی وارد بر پره چقدر است؟

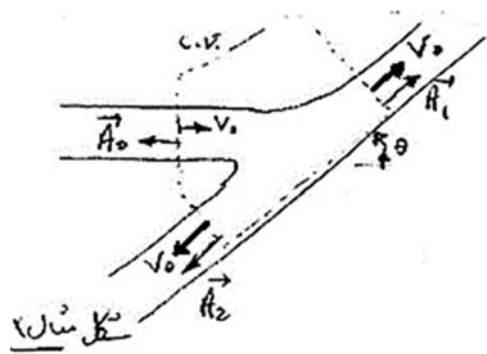


$$F_x = \rho Q (V_0 \cos \theta - V_2) \quad , \quad F_y = \rho Q V_0 \sin \theta$$

$$F_x = +1000 (0.060) (50 \cos 135^\circ - 50) = -5.121 \text{ kN} \leftarrow$$

$$F_y = 1000 (0.060) (50 \sin 135^\circ) = 2.121 \text{ kN} \uparrow$$

نیروهای بدست آمده از پره به آب وارد می‌شود؛ نیروهای وارد از آب بر پره، دارای جهت خلاف نیروهای محاسبه شده است.



مثال ۲: مطابق شکل، سیال از یک شکاف عریض به مساحت سطح مقطع A_0 خارج می‌شود و به صفحه شیبدار صافی برخورد می‌کند؛ با چشم پوشی از اصطکاک و تلفات انرژی، مطلوب است محاسبه نحوه تقسیم دبی و مقدار و جهت نیروی وارد بر صفحه شیبدار

با توجه به اینکه اصطکاک نداریم، پس در جهت شیب نیرویی به صفحه وارد نمی‌شود.

حال معادله اندازه حرکت را در راستای شیب می‌نویسیم:

$$0 = \rho (V_1 A_1) (V_1) + \rho (V_2 A_2) (-V_2) + \rho (-V_0 A_0) (V_0 \cos \theta)$$

با نوشتن رابطه انرژی بین دو مقطع صفر و یک؛ همین‌طور بین دو مقطع صفر و دو بدست می‌آوریم: $V_0 = V_1 = V_2$ ؛ بنابراین:

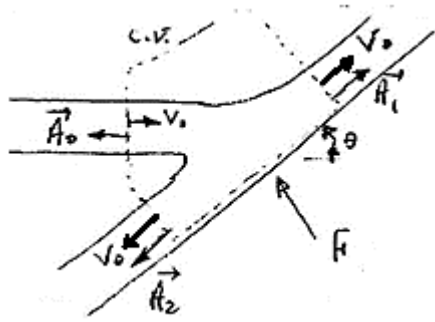
$$0 = \rho (V_0 A_1) V_0 + \rho (V_0 A_2) (-V_0) + \rho (-V_0 A_0) (V_0 \cos \theta)$$

$$0 = Q_1 - Q_2 - Q_0 \cos \theta \Rightarrow Q_1 - Q_2 = Q_0 \cos \theta$$

$$\text{از رابطه پیوستگی داریم:} \quad Q_1 + Q_2 = Q_0$$

$$2Q_1 = Q_0 (1 + \cos\theta) \Rightarrow Q_1 = \frac{Q_0}{2} (1 + \cos\theta)$$

$$2Q_2 = Q_0 (1 - \cos\theta) \Rightarrow Q_2 = \frac{Q_0}{2} (1 - \cos\theta)$$



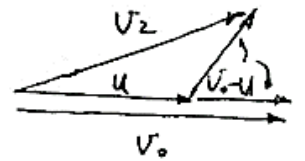
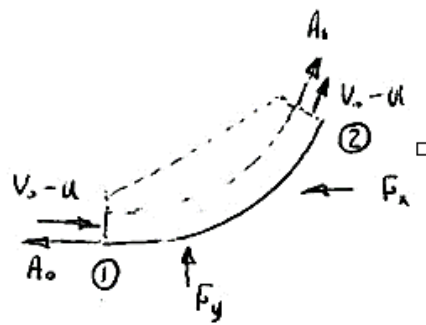
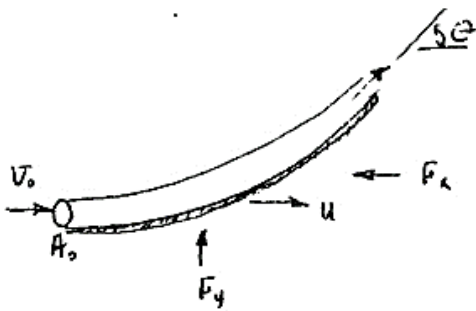
محاسبه نیروی وارد بر صفحه: با توجه به اینکه در راستای مماس بر صفحه نیرویی نداریم، پس نیروی وارد بر صفحه، عمود بر صفحه است. با نوشتن معادله اندازه حرکت عمود بر صفحه داریم:

$$F = \rho (-V_0 A_0) (-V_0 \sin\theta)$$

$$F = \rho Q_0 V_0 \sin\theta$$

پره‌های متحرک

در بررسی پره‌های متحرک، مناسب است که از مفهوم سرعت نسبی استفاده شود و از دید ناظر همراه پره موضوع را بررسی کنیم. اگر پره با سرعت u در حرکت باشد و جت جریان با سرعت V_0 به آن نزدیک شود، سرعت نسبی نزدیک شدن جریان به پره، $V_0 - u$ خواهد بود. جهت سرعت جریان پس از برخورد به پره به اندازه θ تغییر می‌کند اما مقدار $V_0 - u$ در ورودی و خروجی پره برابر است. V_2 (سرعت مطلق خروج جریان از پره نسبت به زمین) را می‌توان از جمع برداری $\vec{u}$ و $\vec{V}_0 - \vec{u}$ بدست آورد.



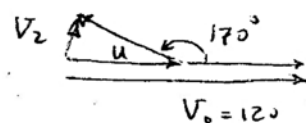
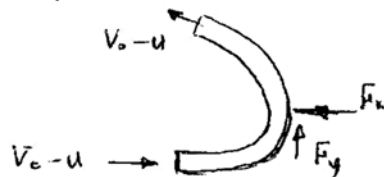
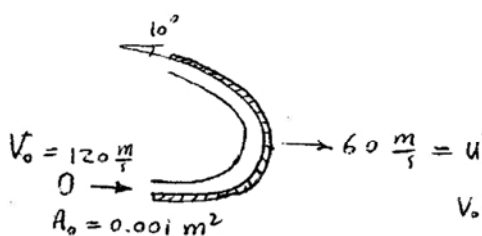
$$\sum F_x = \int_C \rho u_x \vec{V} \cdot d\vec{A} \Rightarrow -F_x = \rho (V_0 - u) \cos\theta [(V_0 - u) A_0] + \rho (V_0 - u) [-(V_0 - u) A_0]$$

$$F_x = \rho (V_0 - u)^2 A_0 (1 - \cos\theta)$$

$$\sum F_y = \int_C \rho u_y \vec{V} \cdot d\vec{A} \Rightarrow F_y = \rho (V_0 - u) \sin\theta [(V_0 - u) A_0] + \rho (0)$$

$$F_y = \rho (V_0 - u)^2 A_0 \sin\theta$$

مثال پره‌های دار در چرخ و تران مستقیم - پره را حساب کنید.



$$V_0 - u = V_r$$

$$-F_x = \rho A_0 v_r v_r \cos 170^\circ + \rho (v_r A_0) v_r = \rho v_r^2 A_0 (\cos \theta - 1)$$

$$F_x = -1000 (0.001) (60^2) (\cos 170^\circ - 1) \Rightarrow F_x = 7.145 \text{ kN}$$

$$F_y = \rho (v_r A_0) v_r \sin \theta = 1000 (60 \times 0.001) (60 \sin 170^\circ) = 625 \text{ N}$$

توان سیال : $u F_x = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 7.145 = 428.7 \text{ k} \left(\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} \right)$
 $\text{W} \Rightarrow$

